Vorbereitende Theorie und Etablierung eines Algorithmus zur Bestimmung einer optimalen Strategie

Torsten Grote

Universität Potsdam - Institut für Informatik

25.04.2005

Gliederung

Ungleichung von Kraft

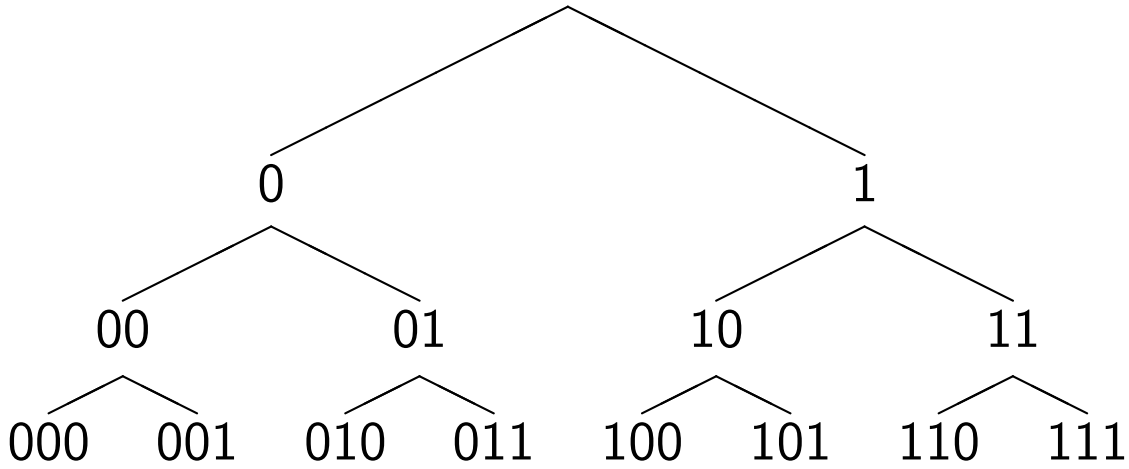
Präfixcodes

- Präfixcodes lassen sich als Binärbäume darstellen.
- Sequentielle Suchstrategien und Präfixcodes sind äquivalent.
- Im Folgenden wird der Einfachheit halber nur von Präfixcodes die Rede sein.

Problemstellung

- Zu welchen Codewortlängen $L(1), ..., L(n)$ existiert ein Präfixcode?
- Lösung anhand von Binärbäumen

Ungleichung von Kraft



- Wenn das längste Codewort eines Präfixcodes die Länge L_{max} hat, kommt jedes Codewort im Binärbaum T_{max} der Länge L_{max} vor.
- Codewort der Länge L hat in T_{max} genau $2^{L_{max}-L}$ Blätter als Nachfolger. Bsp: '01' hat $2 = 2^{3-2}$ Nachfolger.
- T_{max} hat $2^{L_{max}}$ Blätter und es gilt: $\sum_{1 \leq j \leq n} 2^{L_{max}-L(j)} \leq 2^{L_{max}}$
- folglich gilt $2^{L_{max}} \cdot \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{1}{2^{L(j)}} \leq 2^{L_{max}}$ und $\sum_{1 \leq j \leq n} 2^{-L(j)} \leq 1$

Ungleichung von Kraft

Die Ungleichung von Kraft

Es gibt genau dann einen Präfixcode im Alphabet $\{0, 1\}$ mit Codewortlängen $L(1), ..., L(n)$, wenn $\sum_{1 \leq j \leq n} 2^{-L(j)} \leq 1$ ist.

- Die Aussage gilt auch bei einem k-elementigen Alphabet, wenn man die 2 durch k ersetzt.

Entropie

- Entropie ist Maß für den Informationsgehalt einer Nachricht
- hier als Maß für die Unsicherheit über den Wert einer Zufallsvariablen mit der Verteilung p interpretiert

Die Entropie der Wahrscheinlichkeitsverteilungen $p = (p(1), ..., p(n))$ ist $H(p) := -\sum_{1 \leq i \leq n} p(i) \cdot log_2 p(i)$.

noiseless-coding-theorem

Fragestellung

Gibt es Schranken für die erwartete Codewortlänge eines optimalen Präfixcodes?

Sei für $i \in \{1, ..., n\}$ $p(i) > 0$ und $L_{min}(p)$ die erwartete Codewortlänge eines optimalen Präfixcodes zur a-priori Verteilung p. Dann ist $H(p) \leq L_{min}(p) < H(p) + 1$

- Die erwartete Codewortlänge bzw. die erwartete Suchdauer einer optimalen sequentiellen Suchstategie ist also mindestens $H(p)$ und kleiner als $H(p) + 1$.
- Je größer die Entropie der Wahrscheinlichkeitsverteilung, desto länger dauert im Schnitt eine optimale Suche.
- Das noiseless-coding-theorem gilt auch bei einem k-elementigen Alphabet, wenn man die Entropie mit $H(p) := -\sum_{1 \leq i \leq n} p(i) \cdot log_k p(i)$ berechnet.

Der Algorithmus von Huffman

Problemstellung

Wie kann man optimale Präfixcodes bzw. optimale Suchstrategien ermitteln?

Lösung

- 1952 fand David A. Huffman einen Algorithmus, der beweisbar immer einen optimalen Baum liefert.
- Der Baum repräsentiert den Präfixcode und seine Blätter die Nachrichten bzw. die Codewörter.
- Die Häufigkeitsverteilung der verschiedenen Nachrichten muss allerdings bekannt sein.

Der Algorithmus von Huffman

Sei $p = (p(1), ..., p(n))$ eine a-priori-Verteilung für n Nachrichten, wobei $p(1) \geq ... \geq p(n)$ ist.
Sei $p' = (p(1), ..., p(n-2), p(n-1) + p(n))$ und sei $c' = (c'(1), ..., c'(n-1))$ ein optimaler Präfixcode zu p'. Sei für $j \in \{1, ..., n-2\} \quad c(j) := c'(j)$ und sei $c(n-1)$ bzw. $c(n)$ die Verlängerung von $c'(n-1)$ um eine 0 bzw. 1.
Dann ist c ein optimaler Code zu p und $L_{min}(p) - L_{min}(p') = E(c) - E(c') = p(n-1) + p(n)$.

Der Algorithmus von Huffman

1. Sei N_i die i-te Nachricht. Ordne $p(1), ..., p(n)$, so dass $p(i_1) \geq ... \geq p(i_n)$ ist.
2. Falls $i_n \geq 2$, fasse die Nachrichen N_i und N_j mit den kleinsten Wahrscheinlichkeiten zu einer neuen Nachricht $N_{(i,j)}$ mit $p((i,j)) := p(i) + p(j)$ zusammen. Entferne nun N_i mit $p(i)$ sowie N_j mit $p(j)$ und füge dafür $N_{(i,j)}$ mit $p((i,j))$ ein. Wiederhole nun solange, bis nur noch zwei Nachrichten vorliegen, denen die Codeworte 0 und 1 zugeordnet werden.
3. Durchlaufe 2. in umgekehrter Reihenfolge. Falls N_i und N_j zu $N_{(i,j)}$ zusammengefasst wurden und $c((i,j))$ das Codewort dafür ist, dann seien $c(i)$ und $c(j)$ die Verlängerungen von $c((i,j))$ um 0 und 1.
4. $c = (c(1), ..., c(n)))$ ist ein optimaler Präfixcode für $N_1, ..., N_n$.

Der Algorithmus von Huffman

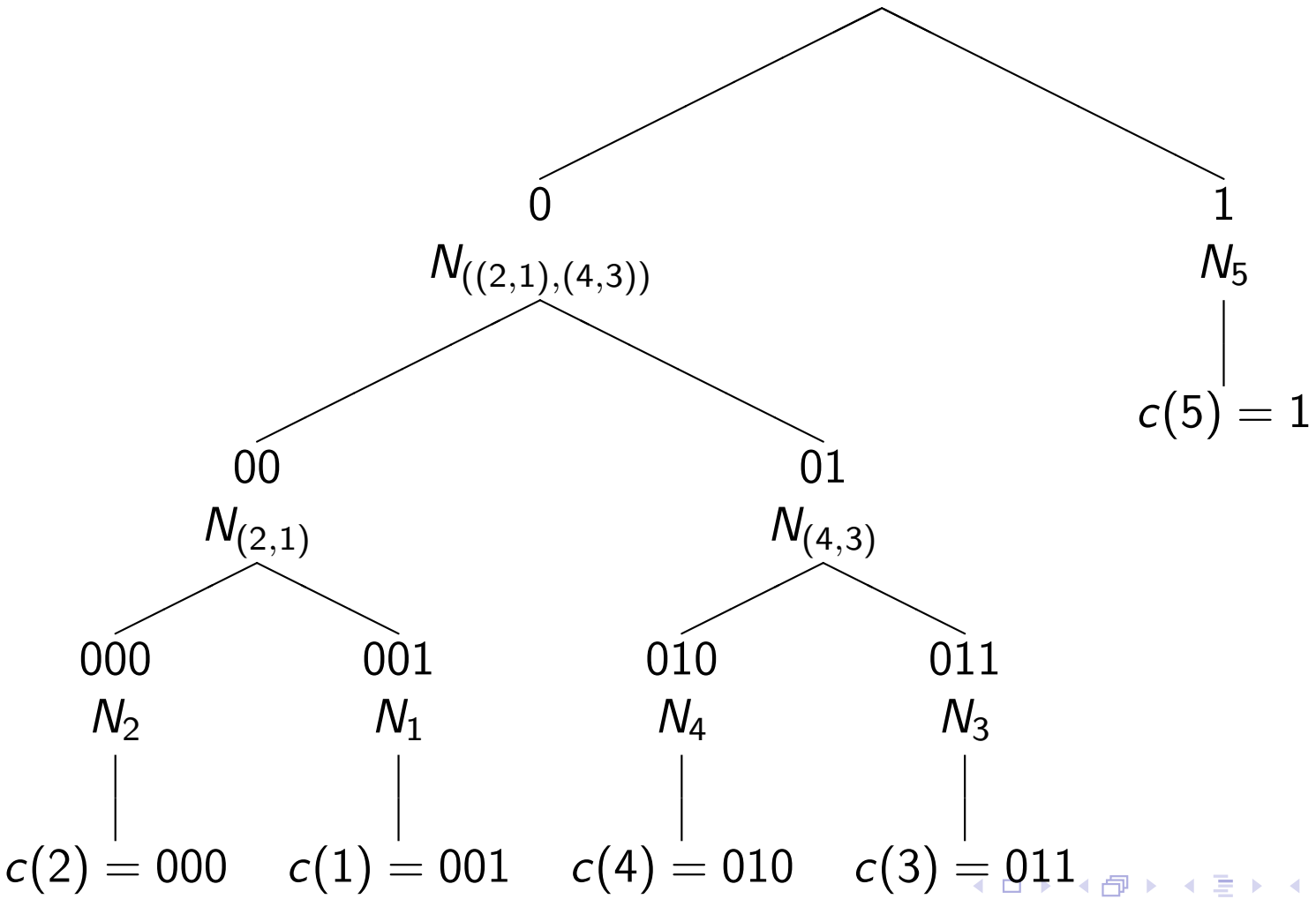
Für 5 Nachrichten mit den Wahrscheinlichkeiten $p(1) = 0,15$, $p(2) = 0,20$, $p(3) = 0,10$, $p(4) = 0,15$ und $p(5) = 0,40$ soll ein optimaler Präfixcode gefunden werden.

N_5	$0,40$	N_5	$0,40$	N_5	$0,40$	$N_{((2,1),(4,3))}$	$0,60$
N_2	$0,20$	$N_{(4,3)}$	$0,25$	$N_{(2,1)}$	$0,35$	N_5	$0,40$
N_1	$0,15$	N_2	$0,20$	$N_{(4,3)}$	$0,25$		
N_4	$0,15$	N_1	$0,15$				
N_3	$0,10$						

Nun werden rückwärts die Codewörter vergeben.

$N_{((2,1),(4,3))}$	0	N_5	1	N_5	1	N_5	1	$=: c(5)$
N_5	1	$N_{(2,1)}$	00	$N_{(4,3)}$	01	N_2	000	$=: c(2)$
		$N_{(4,3)}$	01	N_2	000	N_1	001	$=: c(1)$
				N_1	001	N_4	010	$=: c(4)$
						N_3	011	$=: c(3)$

Der Algorithmus von Huffman



Der Algorithmus von Huffman

$$H(p) = H((p(1), p(2), p(3), p(4), p(5))) = -\sum_{1 \leq i \leq n} p(i) \cdot log_2 p(i)$$

$$= p(1) \cdot log_2 p(1) + ... + p(5) \cdot log_2 p(5)$$

$$\approx 2,146$$

$$H(p) \approx 2,146 \leq L_{min}(p) < 3,146 \approx H(p) + 1$$

$$E(c) = E((c(1), c(2), c(3), c(4), c(5))) = \sum_{1 \leq i \leq n} p(i) \cdot L(i)$$

$$= p(1) \cdot L(1) + p(2) \cdot L(2) + p(3) \cdot L(3) + p(4) \cdot L(4) + p(5) \cdot L(5)$$

$$= 0,15 \cdot 3 + 0,20 \cdot 3 + 0,10 \cdot 3 + 0,15 \cdot 3 + 0,40 \cdot 1$$

$$= 2,2$$

Optimale Strategien bei Gleichverteilung auf dem Suchbereich

Problemstellung

Wie kann die erwartete Suchdauer bei Gleichverteilung bestimmt werden?

Längendifferenz

Sei c ein für p_n optimaler Präfixcode mit den Codewortlängen $L(1) \leq ... \leq L(n)$. Dann ist $L(n) - L(1) \leq 1$.

Codewortlänge

$L_{min}(p_n) = \lceil log_2 n \rceil - \frac{1}{n} 2^{\lceil log_2 n \rceil} + 1$. Wenn c ein für p_n optimaler Präfixcode ist, haben $a(n) = 2^{\lceil log_2 n \rceil} - n$ Codeworte die Länge $\lceil log_2 n \rceil - 1$ und $b(n) = 2n - 2^{\lceil log_2 n \rceil}$ Codeworte die Länge $\lceil log_2 n \rceil$.

Quellenverzeichnis


Rudolf Ahlswede und Ingo Wegener:
Suchprobleme
Stuttgart, 1979, S. 25–37.


Wikipedia. Die freie Enzyklopädie:
Stichwort: Shannon-Fano-Kodierung
Stand: 16.04.2005

Fragen?